Volume des sous-variétés algébriques réelles aléatoires

Thomas Letendre (ENS de Lyon)

Rennes – 17 octobre 2016

Géométrie aléatoire

(M, g) variété riemannienne, compacte, sans bord, de dimension n.
On choisit une sous-variété de codimension r de M “au hasard”.

Question

Que peut-on dire de sa géométrie (volume, courbure, ...) ou de sa topologie (nombre de composantes connexes, nombres de Betti, caractéristique d'Euler, ...) ?

On cherche une réponse statistique : moyenne, moments, loi, comportement presque sûr...

Racines de polynômes réels

Sur $\mathbb{C}$, un polynôme de degré d a d racines, génériquement simples.

Question

Combien un polynôme de $\mathbb{R}_d[X]$ a-t-il de racines réelles ?

Racines de polynômes réels

Sur $\mathbb{C}$, un polynôme de degré d a d racines, génériquement simples.

Question

Combien un polynôme de $\mathbb{R}_d[X]$ a-t-il de racines réelles ?

Théorème (Kac, 1943)

Soit $P = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i$ *avec* a_i *des v.a.i.i.d. gaussiennes centrées réduites et* $Z_d = P^{-1}(0)$, *alors*

$$\mathbb{E}[\mathrm{card}\,(Z_d)] \sim \frac{2}{\pi} \ln(d).$$

Dimension supérieure

Notations

Soit $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^{n+1}$, on note :

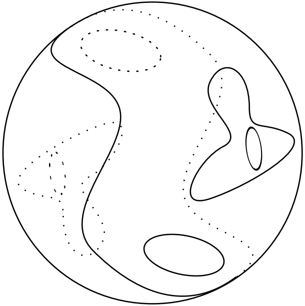
- $|\alpha| = \alpha_0 + \cdots + \alpha_n$,
- $X^\alpha = X_0^{\alpha_0} \cdots X_n^{\alpha_n}$,
- $\alpha! = \alpha_0! \cdots \alpha_n!$,
- si $|\alpha| = d$, $\displaystyle\binom{d}{\alpha} = \frac{d!}{\alpha!}$.

P polynôme homogène de $\mathbb{R}_d^{\text{hom}}[X_0, \dots, X_n]$: $P = \displaystyle\sum_{|\alpha|=d} a_\alpha X^\alpha$.

$P^{-1}(0)$ cône de $\mathbb{R}^{n+1}$, on s'intéresse à $Z_P = P^{-1}(0) \cap \mathbb{S}^n$.

Le 16ème problème de Hilbert

En dimension $n = 2$, Z_P est génériquement une union disjointe d'ovales.



Problème

Combien Z_P peut-il avoir de composantes connexes (en fonction de d) ?
Quels sont les agencements possibles pour ces composantes ?

Théorème (Harnack, 1876)

Soit $P \in \mathbb{R}_d^{hom}[X_0, X_1, X_2]$ tel que Z_P soit non singulier, alors Z_P a au plus $(d-1)(d-2)+2$ composantes connexes.

Variables gaussiennes

$(V, \langle \cdot\,, \cdot \rangle)$ euclidien de dimension N,
Λ auto-adjoint et défini positif.

Définition

On dit qu'une variable aléatoire X à valeurs dans V est gaussienne, centrée, de variance Λ, si sa loi admet la densité :

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}\sqrt{\det(\Lambda)}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left\langle \Lambda^{-1}x\,, x\right\rangle\right)$$

par rapport à la mesure de Lebesgue. On note $X \sim \mathcal{N}(\Lambda)$.

Si X est réduite ($\Lambda = \mathrm{Id}$), alors dans toute base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$, $X = \sum a_i e_i$ avec $a_1, \ldots, a_n$ des v.a.i.i.d réelles de loi $\mathcal{N}(1)$.

Quelques propriétés des gaussiennes

- Dans le monde gaussien, deux v.a. sont indépendantes ssi elles sont décorrélées.

- Si $X \sim \mathcal{N}(\Lambda)$ dans V et $L : V \to V'$ linéaire entre espaces euclidiens, alors on a $L(X) \sim \mathcal{N}(L\Lambda L^*)$.

- Si (X, Y) est gaussien centré de variance $\begin{pmatrix} A & B^{\mathrm{t}} \\ B & C \end{pmatrix}$, alors la loi de Y sachant que $X = 0$ est aussi gaussienne centrée et sa variance est :

$$C - BA^{-1}B^{\mathrm{t}}.$$

Polynômes de Kostlan–Shub–Smale

On considère $P \in \mathbb{R}_d^{\text{hom}}[X_0, \ldots, X_n]$ aléatoire distribué selon la loi de Kostlan :

$$P = \sqrt{\frac{(d+n)!}{\pi^n d!}} \sum_{|\alpha|=d} a_\alpha \sqrt{\binom{d}{\alpha}} X^\alpha,$$

où les $(a_\alpha)_{|\alpha|=d}$ sont des v.a.i.i.d de loi $\mathcal{N}(1)$.

Polynômes de Kostlan–Shub–Smale

On considère $P \in \mathbb{R}_d^{\text{hom}}[X_0, \dots, X_n]$ aléatoire distribué selon la loi de Kostlan :

$$P = \sqrt{\frac{(d+n)!}{\pi^n d!}} \sum_{|\alpha|=d} a_\alpha \sqrt{\binom{d}{\alpha}} X^\alpha,$$

où les $(a_\alpha)_{|\alpha|=d}$ sont des v.a.i.i.d de loi $\mathcal{N}(1)$.

Remarque

$P \sim \mathcal{N}(\mathrm{Id})$ dans $\mathbb{R}_d^{\text{hom}}[X_0, \dots, X_n]$ pour le produit scalaire L^2 :

$$\langle P \,, Q \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{\{z \in \mathbb{C}^{n+1} \mid \|z\|=1\}} P(z) \overline{Q(z)} \, \mathrm{d}\theta(z).$$

En particulier, la loi de Kostlan est invariante sous l'action de $O_{n+1}(\mathbb{R})$ par précomposition.

Polynômes de Kostlan–Shub–Smale

Soient $d, n \in \mathbb{N}^*$ et $r \in \{1, \dots, n\}$,
$P_1, \dots, P_r$ de degré d indépendants distribués selon la loi de Kostlan,
on note $Z_d = Z_{P_1} \cap \cdots \cap Z_{P_r} \subset \mathbb{S}^n$.

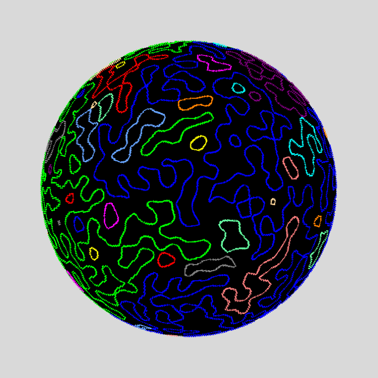
Lemme

Z_d est presque surement une sous-variété lisse de codimension r de $\mathbb{S}^n$.

Théorème (Kostlan, 1993)

Pour tout n, r et d, on a : $\mathbb{E}[\mathrm{Vol}(Z_d)] = d^{\frac{r}{2}} \mathrm{Vol}(\mathbb{S}^{n-r})$.

Polynômes de Kostlan–Shub–Smale



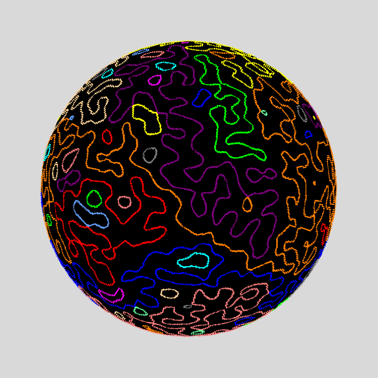


Figure: Courbes aléatoires de degré 56 dans $\mathbb{S}^2$ dans le modèle de Kostlan.

Images par Maria Nastasescu (Caltech).

Cadre algébrique réel

$\mathcal{X}$ variété projective complexe de dimension n, définie sur les réels.
M lieu réel de $\mathcal{X}$, supposé non vide.
$(\mathcal{E}, h_{\mathcal{E}})$ fibré hermitien de rang r sur $\mathcal{X}$.
$(\mathcal{L}, h_{\mathcal{L}})$ fibré en droites hermitien positif sur $\mathcal{X}$.
ω forme de Kähler induite par la courbure de $\mathcal{L}$.

On suppose que $\mathcal{L}$ et $\mathcal{E}$ sont équipés de structures réelles compatibles.

Cadre algébrique réel

$\mathcal{X}$ variété projective complexe de dimension n, définie sur les réels.
M lieu réel de $\mathcal{X}$, supposé non vide.
$(\mathcal{E}, h_{\mathcal{E}})$ fibré hermitien de rang r sur $\mathcal{X}$.
$(\mathcal{L}, h_{\mathcal{L}})$ fibré en droites hermitien positif sur $\mathcal{X}$.
ω forme de Kähler induite par la courbure de $\mathcal{L}$.

On suppose que $\mathcal{L}$ et $\mathcal{E}$ sont équipés de structures réelles compatibles.

Exemple

$\mathcal{X} = \mathbb{CP}^n$, $M = \mathbb{RP}^n$,
$\mathcal{E}$ est le fibré trivial $\mathbb{C}^r \times \mathbb{CP}^n \to \mathbb{CP}^n$,
$\mathcal{L}$ est $\mathcal{O}(1)$ le fibré des hyperplans et donc ω est la forme de Fubini–Study.

Cadre algébrique réel

$\mathbb{R}H^0(\mathcal{X}, \mathcal{E} \otimes \mathcal{L}^d)$ espace des sections holomorphes globales invariantes par conjugaison de $\mathcal{E} \otimes \mathcal{L}^d$.

ω, $h_{\mathcal{L}}$ et $h_{\mathcal{E}}$ induisent un produit scalaire L^2 sur $\mathbb{R}H^0(\mathcal{X}, \mathcal{E} \otimes \mathcal{L}^d)$.

Définition

$s_d \in \mathbb{R}H^0(\mathcal{X}, \mathcal{E} \otimes \mathcal{L}^d)$ section aléatoire de loi $\mathcal{N}(\mathrm{Id})$,
$Z_d = s_d^{-1}(0) \cap M$.

Cadre algébrique réel

$\mathbb{R}H^0(\mathcal{X}, \mathcal{E} \otimes \mathcal{L}^d)$ espace des sections holomorphes globales invariantes par conjugaison de $\mathcal{E} \otimes \mathcal{L}^d$.

ω, $h_{\mathcal{L}}$ et $h_{\mathcal{E}}$ induisent un produit scalaire L^2 sur $\mathbb{R}H^0(\mathcal{X}, \mathcal{E} \otimes \mathcal{L}^d)$.

Définition

$s_d \in \mathbb{R}H^0(\mathcal{X}, \mathcal{E} \otimes \mathcal{L}^d)$ section aléatoire de loi $\mathcal{N}(\mathrm{Id})$,
$Z_d = s_d^{-1}(0) \cap M$.

Exemple

$\mathbb{R}H^0(\mathcal{X}, \mathcal{E} \otimes \mathcal{L}^d) = \left(\mathbb{R}_d^{\mathrm{hom}}[X_0, \dots, X_n]\right)^r$,
s_d est un r-uplet de polynômes de Kostlan–Shub–Smale indépendants.

Cadre algébrique réel

$\mathbb{R}H^0(\mathcal{X}, \mathcal{E} \otimes \mathcal{L}^d)$ espace des sections holomorphes globales invariantes par conjugaison de $\mathcal{E} \otimes \mathcal{L}^d$.

ω, $h_{\mathcal{L}}$ et $h_{\mathcal{E}}$ induisent un produit scalaire L^2 sur $\mathbb{R}H^0(\mathcal{X}, \mathcal{E} \otimes \mathcal{L}^d)$.

Définition

$s_d \in \mathbb{R}H^0(\mathcal{X}, \mathcal{E} \otimes \mathcal{L}^d)$ section aléatoire de loi $\mathcal{N}(\mathrm{Id})$,
$Z_d = s_d^{-1}(0) \cap M$.

Exemple

$\mathbb{R}H^0(\mathcal{X}, \mathcal{E} \otimes \mathcal{L}^d) = \left(\mathbb{R}_d^{\mathrm{hom}}[X_0, \dots, X_n]\right)^r$,
s_d est un r-uplet de polynômes de Kostlan–Shub–Smale indépendants.

Lemme

Z_d est presque surement une sous-variété lisse de codimension r de M.

Espérance du volume

$|\mathrm{d}V_M|$ mesure riemannienne sur M, $|\mathrm{d}V_d|$ mesure riemannienne sur Z_d.

Pour tout $\phi \in \mathcal{C}^0(M)$, on note $\langle Z_d\,, \phi \rangle = \displaystyle\int_{Z_d} \phi \, |\mathrm{d}V_d|$.

Théorème (L., 2014)

Pour tout $\phi \in \mathcal{C}^0(M)$,

$$\mathbb{E}[\langle Z_d\,, \phi \rangle] = d^{\frac{r}{2}} \left(\int_M \phi \, |\mathrm{d}V_M| \right) \frac{\mathrm{Vol}\left(\mathbb{S}^{n-r}\right)}{\mathrm{Vol}\left(\mathbb{S}^{n}\right)} + \|\phi\|_{\mathcal{C}^0} \, O\Big(d^{\frac{r}{2}-1} \Big),$$

où le terme d'erreur est indépendant de ϕ.

Espérance du volume

$|\mathrm{d}V_M|$ mesure riemannienne sur M, $|\mathrm{d}V_d|$ mesure riemannienne sur Z_d.

Pour tout $\phi \in \mathcal{C}^0(M)$, on note $\langle Z_d \,, \phi \rangle = \displaystyle\int_{Z_d} \phi \, |\mathrm{d}V_d|$.

Théorème (L., 2014)

Pour tout $\phi \in \mathcal{C}^0(M)$,

$$\mathbb{E}[\langle Z_d \,, \phi \rangle] = d^{\frac{r}{2}} \left(\int_M \phi \, |\mathrm{d}V_M| \right) \frac{\mathrm{Vol}\,(\mathbb{S}^{n-r})}{\mathrm{Vol}\,(\mathbb{S}^n)} + \|\phi\|_{\mathcal{C}^0} \, O\Big(d^{\frac{r}{2}-1}\Big),$$

où le terme d'erreur est indépendant de ϕ.

Corollaire

Au sens des mesures de Radon, $d^{-\frac{r}{2}} \mathbb{E}[Z_d] \xrightarrow[d \to +\infty]{} \dfrac{\mathrm{Vol}\,(\mathbb{S}^{n-r})}{\mathrm{Vol}\,(\mathbb{S}^n)} |\mathrm{d}V_M|$.

Variance du volume

Théorème (L., 2016)

Si $1 \leqslant r < n$*, alors pour tout* $\phi \in \mathcal{C}^0(M)$

$$\mathrm{Var}(\langle Z_d\,,\phi\rangle) = d^{r-\frac{n}{2}} \left(\int_M \phi^2 \,|\mathrm{d}V_M|\right) \mathcal{I}_{n,r} + o\Big(d^{r-\frac{n}{2}}\Big)\,,$$

où $\mathcal{I}_{n,r}$ *est explicite et* $0 \leqslant \mathcal{I}_{n,r} < +\infty$*.*

Variance du volume

Théorème (L., 2016)

Si $1 \leqslant r < n$*, alors pour tout* $\phi \in \mathcal{C}^0(M)$

$$\mathrm{Var}(\langle Z_d\,,\phi\rangle) = d^{r-\frac{n}{2}} \left(\int_M \phi^2 \,|\mathrm{d}V_M|\right) \mathcal{I}_{n,r} + o\Big(d^{r-\frac{n}{2}}\Big)\,,$$

où $\mathcal{I}_{n,r}$ *est explicite et* $0 \leqslant \mathcal{I}_{n,r} < +\infty$*.*

Corollaire

$$\mathrm{Var}(\mathrm{Vol}\,(Z_d)) = d^{r-\frac{n}{2}}\,\mathrm{Vol}\,(M)\,\mathcal{I}_{n,r} + o\Big(d^{r-\frac{n}{2}}\Big)\,.$$

Le cas des points

Pour un polynôme de Kostlan–Shub–Smale dans $\mathbb{S}^1$ ($n = r = 1$).

Théorème (Kostlan, 1993)

$$\mathbb{E}[\mathrm{card}(Z_d)] = 2\sqrt{d}.$$

Théorème (Dalmao, 2015)

Il existe $\sigma^2 > 0$ explicite tel que :

$$\mathrm{Var}(\mathrm{card}(Z_d)) \sim \sigma^2 \sqrt{d}.$$

De plus,

$$\frac{\mathrm{card}(Z_d) - 2\sqrt{d}}{\sigma d^{\frac{1}{4}}} \xrightarrow[d \to +\infty]{loi} \mathcal{N}(1).$$

Concentration en probabilité

Corollaire

Soit $1 \leqslant r < n$, alors pour tout $\phi \in \mathcal{C}^0(M)$,

$$\mathbb{P}\left(\left|\langle Z_d\,,\phi\rangle - \mathbb{E}[\langle Z_d\,,\phi\rangle]\right| \geqslant d^{\frac{r}{4}}\right) = O\Big(d^{\frac{r-n}{2}}\Big)\,.$$

Démonstration.

Par l'inégalité de Chebyshev,

$$\mathbb{P}\left(\left|\langle Z_d\,,\phi\rangle - \mathbb{E}[\langle Z_d\,,\phi\rangle]\right| \geqslant d^{\frac{r}{4}}\right) \leqslant d^{-\frac{r}{2}}\,\mathrm{Var}(\langle Z_d\,,\phi\rangle) = O\Big(d^{\frac{r-n}{2}}\Big)\,.$$

□

Équidistribution en probabilité

Corollaire

Soit $1 \leqslant r < n$, pour tout ouvert $U \subset M$,

$$\mathbb{P}\left(Z_d \cap U = \emptyset\right) = O\left(d^{-\frac{n}{2}}\right).$$

Équidistribution en probabilité

Corollaire

Soit $1 \leqslant r < n$, pour tout ouvert $U \subset M$,

$$\mathbb{P}\left(Z_d \cap U = \emptyset\right) = O\left(d^{-\frac{n}{2}}\right).$$

On prend $\phi_U \in \mathcal{C}^0(M)$, nulle hors de U, strictement positive sur U.
Soit $\varepsilon > 0$ tel que :

$$\varepsilon < \frac{1}{2}\left(\int_M \phi_U \left|\mathrm{d}V_M\right|\right)\frac{\mathrm{Vol}\left(\mathbb{S}^{n-r}\right)}{\mathrm{Vol}\left(\mathbb{S}^n\right)}.$$

Pour tout d assez grand,

$$\mathbb{E}[\langle Z_d\,,\phi_U\rangle] - d^{\frac{r}{2}}\varepsilon \geqslant \frac{1}{2}d^{\frac{r}{2}}\left(\int_M \phi_U \left|\mathrm{d}V_M\right|\right)\frac{\mathrm{Vol}\left(\mathbb{S}^{n-r}\right)}{\mathrm{Vol}\left(\mathbb{S}^n\right)} > 0.$$

Équidistribution en probabilité

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(Z_d \cap U = \emptyset\right) &= \mathbb{P}\left(\langle Z_d \,, \phi_U \rangle = 0\right) \\
&\leqslant \mathbb{P}\left(\langle Z_d \,, \phi_U \rangle < \mathbb{E}[\langle Z_d \,, \phi_U \rangle] - d^{\frac{r}{2}}\varepsilon\right) \\
&\leqslant \mathbb{P}\left(\left|\langle Z_d \,, \phi_U \rangle - \mathbb{E}[\langle Z_d \,, \phi_U \rangle]\right| > d^{\frac{r}{2}}\varepsilon\right) \\
&\leqslant \frac{1}{d^r \varepsilon} \operatorname{Var}(\langle Z_d \,, \phi_U \rangle) \\
&= O\left(d^{-\frac{n}{2}}\right).
\end{aligned}$$

Universalité du lieu des zéros

Théorème (Gayet–Welschinger, 2013)

Soient $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ *sous-variété compacte sans bord de codimension* r *et* $R > 0$. *Il existe* $C_{\Sigma,R} \geqslant 0$ *telle que, pour tout* d *assez grand, pour tout* $x \in M$,

$$\mathbb{P}\left(Z_d \cap B\left(x, \frac{R}{\sqrt{d}}\right) \supset \Sigma' \text{ avec } \left(B\left(x, \frac{R}{\sqrt{d}}\right), \Sigma'\right) \simeq (\mathbb{R}^n, \Sigma)\right) \geqslant C_{\Sigma,R}.$$

De plus, $C_{\Sigma,R} > 0$ *pour* R *assez grand.*

Universalité du lieu des zéros

Théorème (Gayet–Welschinger, 2013)

Soient $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ *sous-variété compacte sans bord de codimension* r *et* $R > 0$. *Il existe* $C_{\Sigma,R} \geqslant 0$ *telle que, pour tout* d *assez grand, pour tout* $x \in M$,

$$\mathbb{P}\left(Z_d \cap B\left(x, \frac{R}{\sqrt{d}}\right) \supset \Sigma' \text{ avec } \left(B\left(x, \frac{R}{\sqrt{d}}\right), \Sigma'\right) \simeq (\mathbb{R}^n, \Sigma)\right) \geqslant C_{\Sigma,R}.$$

De plus, $C_{\Sigma,R} > 0$ *pour* R *assez grand.*

Théorème (Gayet–Welschinger, 2011)

Dans le cas des courbes dans $\mathbb{S}^2$, *il existe* C_1 *et* $C_2 > 0$ *telles que :*

$$\mathbb{P}\left(Z_d \text{ a le nombre maximal de composantes connexes}\right) \leqslant C_1 e^{-dC_2}.$$

La fonction de corrélation

Soit P un polynôme de Kostlan dans $\mathbb{R}_d^{\text{hom}}[X_0, \ldots, X_n]$, P définit un processus gaussien centré $(P(x))_{x \in \mathbb{S}^n}$.

Ce processus est caractérisé par sa fonction de corrélation :

$$e_d : (x, y) \mapsto \mathbb{E}[P(x)P(y)] \,.$$

La fonction de corrélation

Soit P un polynôme de Kostlan dans $\mathbb{R}_d^{\text{hom}}[X_0, \ldots, X_n]$, P définit un processus gaussien centré $(P(x))_{x \in \mathbb{S}^n}$.

Ce processus est caractérisé par sa fonction de corrélation :

$$e_d : (x, y) \mapsto \mathbb{E}[P(x)P(y)] .$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[P(x)P(y)] &= \frac{(d+n)!}{\pi^n d!} \sum_{|\alpha|=d} \binom{d}{\alpha} x^\alpha y^\alpha = \frac{(d+n)!}{\pi^n d!} \left(\langle x \,, y \rangle\right)^d \\ &= \frac{(d+n)!}{\pi^n d!} \cos\left(D(x,y)\right)^d .\end{aligned}$$

La fonction de corrélation

Soit P un polynôme de Kostlan dans $\mathbb{R}_d^{\text{hom}}[X_0, \ldots, X_n]$, P définit un processus gaussien centré $(P(x))_{x \in \mathbb{S}^n}$.

Ce processus est caractérisé par sa fonction de corrélation :

$$e_d : (x, y) \mapsto \mathbb{E}[P(x)P(y)] .$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[P(x)P(y)] &= \frac{(d+n)!}{\pi^n d!} \sum_{|\alpha|=d} \binom{d}{\alpha} x^\alpha y^\alpha = \frac{(d+n)!}{\pi^n d!} \left(\langle x \,, y \rangle\right)^d \\ &= \frac{(d+n)!}{\pi^n d!} \cos\left(D(x,y)\right)^d .\end{aligned}$$

Remarque

En dérivant sous l'intégrale, $\partial_x e_d(x, y) = \mathbb{E}[(d_x P)P(y)]$.

Limite d'échelle du noyau de Bergman

Dans le cas général, la fonction de corrélation e_d est le noyau de Bergman.

On a une limite d'échelle universelle pour e_d (Ma–Marinescu, 2007) :

$$e_d(x,y) \simeq \frac{d^n}{\pi^n} \exp\left(-\frac{d}{2}\|x-y\|^2\right),$$

dès que $D(x,y) \leqslant K\frac{\ln d}{\sqrt{d}}$.

Théorème (Ma–Marinescu, 2015)

Il existe $C > 0$ tel que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\|e_d(x,y)\|_{\mathcal{C}^k} = O\Big(d^{n+\frac{k}{2}} \exp\left(-C\sqrt{d}D(x,y)\right)\Big),$$

indépendamment de (x,y).

Une heuristique pour le volume moyen

Le noyau de Bergman fait apparaître une échelle caractéristique $\frac{1}{\sqrt{d}}$.

On découpe M en boîtes de taille $\frac{1}{\sqrt{d}}$:

$$\simeq \mathrm{Vol}\,(M)\,d^{\frac{n}{2}} \text{ boîtes.}$$

Les boîtes sont indépendantes, et il se passe la même chose dans chacune : même proba que Z_d ait une géométrie donnée dans cette boîte.

Une heuristique pour le volume moyen

Le noyau de Bergman fait apparaître une échelle caractéristique $\frac{1}{\sqrt{d}}$.

On découpe M en boîtes de taille $\frac{1}{\sqrt{d}}$:

$$\simeq \operatorname{Vol}(M)\, d^{\frac{n}{2}} \text{ boîtes.}$$

Les boîtes sont indépendantes, et il se passe la même chose dans chacune : même proba que Z_d ait une géométrie donnée dans cette boîte.

Composantes de taille $\frac{1}{\sqrt{d}}$, donc volume de l'ordre de $\left(\frac{1}{d}\right)^{\frac{n-r}{2}}$.
Finalement $\operatorname{Vol}(Z_d)$ est proportionnel à $\operatorname{Vol}(M)\, d^{\frac{r}{2}}$.

Formule de Kac–Rice

On se place dans le cas des hypersurfaces ($r = 1$).
$P \in \mathbb{R}_d^{\hom}[X_0, \dots, X_n]$ de loi $\mathcal{N}(\mathrm{Id})$, $Z_d = P^{-1}(0) \cap \mathbb{S}^n$.

Formule de Kac-Rice

Pour tout ϕ,

$$\mathbb{E}\left[\int_{Z_d} \phi \, |\mathrm{d}V_d|\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x \in \mathbb{S}^n} \phi(x) \frac{\mathbb{E}\left[\|d_x P\| \,\middle|\, P(x) = 0\right]}{\sqrt{e_d(x,x)}}.$$

Dans le cas général, $x \mapsto e_d(x,x)$ ne s'annule pas pour d assez grand (i.e. la distribution de $P(x)$ n'est pas dégénérée).
Alors formule similaire.

Asymptotique de l'espérance

$$\mathbb{E}[\langle Z_d\,,\phi\rangle] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x\in\mathbb{S}^n}\phi(x)\frac{\mathbb{E}\left[\|d_xP\|\,\middle|\,P(x)=0\right]}{\sqrt{e_d(x,x)}}.$$

On a $e_d(x,x)\sim\frac{d^n}{\pi^n}$. Il faut estimer $\mathbb{E}\left[\|d_xP\|\,\middle|\,P(x)=0\right]$.

Asymptotique de l'espérance

$$\mathbb{E}[\langle Z_d\,,\phi\rangle] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x\in\mathbb{S}^n} \phi(x) \frac{\mathbb{E}\left[\|d_xP\| \,\middle|\, P(x)=0\right]}{\sqrt{e_d(x,x)}}.$$

On a $e_d(x,x) \sim \frac{d^n}{\pi^n}$. Il faut estimer $\mathbb{E}\left[\|d_xP\| \,\middle|\, P(x)=0\right]$.

$(P(x), d_xP)$ est un vecteur gaussien centré de variance

$$\Lambda = \begin{pmatrix} e_d(x,x) & \partial_{y_1} e_d(x,x) & \cdots & \partial_{y_n} e_d(x,x) \\ \partial_{x_1} e_d(x,x) & \partial_{x_1}\partial_{y_1} e_d(x,x) & \cdots & \partial_{x_1}\partial_{y_n} e_d(x,x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{x_n} e_d(x,x) & \partial_{x_n}\partial_{y_1} e_d(x,x) & \cdots & \partial_{x_n}\partial_{y_n} e_d(x,x) \end{pmatrix}.$$

La loi conditionnelle de d_xP est une gaussienne centrée.
Sa variance s'obtient à partir de Λ.

Asymptotique de l'espérance

$$\mathbb{E}[\langle Z_d\, , \phi\rangle] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x\in\mathbb{S}^n} \phi(x) \frac{\mathbb{E}\left[\|d_x P\| \,\middle|\, P(x)=0\right]}{\sqrt{e_d(x,x)}}.$$

On a $e_d(x,x) \sim \frac{d^n}{\pi^n}$. Il faut estimer $\mathbb{E}\left[\|d_x P\| \,\middle|\, P(x)=0\right]$.

$(P(x), d_x P)$ est un vecteur gaussien centré de variance

$$\Lambda = \begin{pmatrix} e_d(x,x) & \partial_{y_1} e_d(x,x) & \cdots & \partial_{y_n} e_d(x,x) \\ \partial_{x_1} e_d(x,x) & \partial_{x_1}\partial_{y_1} e_d(x,x) & \cdots & \partial_{x_1}\partial_{y_n} e_d(x,x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{x_n} e_d(x,x) & \partial_{x_n}\partial_{y_1} e_d(x,x) & \cdots & \partial_{x_n}\partial_{y_n} e_d(x,x) \end{pmatrix}.$$

La loi conditionnelle de $d_x P$ est une gaussienne centrée.
Sa variance s'obtient à partir de Λ.
On utilise les estimations sur e_d pour conclure.

Asymptotique de la variance

$$\mathrm{Var}(\langle Z_d\,,\phi\rangle) = \mathbb{E}\left[\langle Z_d\,,\phi\rangle^2\right] - \mathbb{E}[\langle Z_d\,,\phi\rangle]^2 .$$

Par Kac–Rice, $\mathbb{E}[\langle Z_d\,,\phi\rangle]^2$ vaut :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{x,y\in\mathbb{S}^n} \phi(x)\phi(y)\frac{\mathbb{E}\left[\|d_xP\| \,\middle|\, P(x)=0\right]}{\sqrt{e_d(x,x)}}\frac{\mathbb{E}\left[\|d_yP\| \,\middle|\, P(y)=0\right]}{\sqrt{e_d(y,y)}}.$$

Asymptotique de la variance

$$\mathrm{Var}(\langle Z_d\,,\phi\rangle) = \mathbb{E}\left[\langle Z_d\,,\phi\rangle^2\right] - \mathbb{E}[\langle Z_d\,,\phi\rangle]^2\,.$$

Par Kac–Rice, $\mathbb{E}[\langle Z_d\,,\phi\rangle]^2$ vaut :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{x,y\in\mathbb{S}^n}\phi(x)\phi(y)\frac{\mathbb{E}\left[\|d_xP\|\,\middle|\,P(x)=0\right]}{\sqrt{e_d(x,x)}}\frac{\mathbb{E}\left[\|d_yP\|\,\middle|\,P(y)=0\right]}{\sqrt{e_d(y,y)}}.$$

Par ailleurs,

$$\mathbb{E}\left[\langle Z_d\,,\phi\rangle^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_{x,y\in Z_d}\phi(x)\phi(y)\,|\mathrm{d}V_d|^2\right].$$

Formule de Kac–Rice 2

Pour d assez grand, on a $\det \begin{pmatrix} e_d(x,x) & e_d(x,y) \\ e_d(y,x) & e_d(y,y) \end{pmatrix} \neq 0$, dès que $x \neq y$ (i.e. la loi $(P(x), P(y))$ n'est pas dégénérée).

Formule de Kac-Rice

$$\mathbb{E}\left[\int_{x,y\in Z_d} \phi(x)\phi(y)\, |\mathrm{d}V_d|^2\right] =$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{x,y\in\mathbb{S}^n} \phi(x)\phi(y) \frac{\mathbb{E}\left[\|d_xP\|\,\|d_yP\| \,\middle|\, P(x)=0=P(y)\right]}{\sqrt{e_d(x,x)e_d(y,y)-e_d(x,y)^2}}.$$

Asymptotique de la variance

Finalement

$$\mathrm{Var}(\langle Z_d\,,\phi\rangle) = \frac{1}{2\pi}\int_{x,y\in\mathbb{S}^n} \phi(x)\phi(y)\mathcal{D}_d(x,y),$$

avec

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_d(x,y) =& \frac{\mathbb{E}\left[\|d_xP\|\,\|d_yP\|\;\middle|\;P(x)=0=P(y)\right]}{\sqrt{e_d(x,x)e_d(y,y)-e_d(x,y)^2}}\\ &- \frac{\mathbb{E}\left[\|d_xP\|\;\middle|\;P(x)=0\right]}{\sqrt{e_d(x,x)}}\frac{\mathbb{E}\left[\|d_yP\|\;\middle|\;P(y)=0\right]}{\sqrt{e_d(y,y)}}.\end{aligned}$$

Asymptotique de la variance

Pour $D(x,y) \geqslant K\frac{\ln d}{\sqrt{d}}$, on montre que $\mathcal{D}_d(x,y)$ est $O\Big(d^{r-\frac{n}{2}-1}\Big)$.
Par ailleurs $\frac{1}{d^r}\mathcal{D}_d\left(x, x+\frac{z}{\sqrt{d}}\right) \xrightarrow[d\to+\infty]{} \mathcal{D}(z)$.

$$\begin{aligned}
\int_{x,y\in\mathbb{S}^n} \phi(x)\phi(y)\mathcal{D}_d(x,y) &\simeq \int_{x\in\mathbb{S}^n}\int_{y\in B(x,\frac{\ln d}{\sqrt{d}})} \phi(x)\phi(y)\mathcal{D}_d(x,y) \\
&\simeq d^{-\frac{n}{2}} \int_{x\in\mathbb{S}^n}\int_{z\in B(0,\ln d)} \phi(x)\phi\left(x+\frac{z}{\sqrt{d}}\right)\mathcal{D}_d\left(x, x+\frac{z}{\sqrt{d}}\right) \\
&\simeq d^{r-\frac{n}{2}}\left(\int_{x\in\mathbb{S}^n}\phi(x)^2\right)\left(\int_{\mathbb{R}^n}\mathcal{D}(z)\right).
\end{aligned}$$

Équidistribution presque sure

On considère une suite aléatoire de polynômes de degrés croissants :

$$(P_d)_{d\in\mathbb{N}^*} \in \prod_{d\in\mathbb{N}^*} \mathbb{R}_d^{\mathrm{hom}}[X_0,\ldots,X_n],$$

distribuée selon la loi $\mathrm{d}\nu$, produit des lois de Kostlan.

Corollaire

Si $n \geqslant 3$, alors $\mathrm{d}\nu$-presque surement on a :

$$\forall \phi \in \mathcal{C}^0(\mathbb{S}^n), \qquad \frac{1}{\sqrt{d}}\left\langle Z_{P_d}, \phi\right\rangle \xrightarrow[d\to+\infty]{} \frac{\mathrm{Vol}\left(\mathbb{S}^{n-1}\right)}{\mathrm{Vol}\left(\mathbb{S}^{n}\right)} \int_{\mathbb{S}^n} \phi.$$

Équidistribution presque sure

Soit $\phi \in \mathcal{C}^0(\mathbb{S}^n)$, on a :

$$\mathbb{E}\left[\sum_{d\geqslant 1}\left(\frac{1}{\sqrt{d}}\left(\langle Z_{P_d}\,,\phi\rangle - \mathbb{E}[\langle Z_d\,,\phi\rangle]\right)\right)^2\right] = \sum_{d\geqslant 1}\frac{1}{d}\operatorname{Var}(\langle Z_d\,,\phi\rangle) < +\infty,$$

car $\operatorname{Var}(\langle Z_d\,,\phi\rangle) = O\left(d^{1-\frac{3}{2}}\right)$. Donc d$\nu$-p.s.

$$\sum_{d\geqslant 1}\left(\frac{1}{\sqrt{d}}\left(\langle Z_{P_d}\,,\phi\rangle - \mathbb{E}[\langle Z_d\,,\phi\rangle]\right)\right)^2 < +\infty,$$

et

$$\frac{1}{\sqrt{d}}\langle Z_{P_d}\,,\phi\rangle \xrightarrow[d\to+\infty]{\mathrm{d}\nu-\text{p.s.}} \frac{\operatorname{Vol}\left(\mathbb{S}^{n-1}\right)}{\operatorname{Vol}\left(\mathbb{S}^n\right)}\int_{\mathbb{S}^n}\phi.$$

On conclut par séparabilité de $\mathcal{C}^0(\mathbb{S}^n)$.

The end

Merci de votre attention.